39. Сведение дифференциальной задачи с самосопряженным оператором к вариационной задаче?
40. Как ставится вариационная задача на собственные значения?
41. Что такое вариационные и что такое проекционные алгоритмы? Приведите примеры.
42. В чем состоит метод Ритца? Приведите достаточные условия, обеспечивающие сходимость решений, найденных по методу Ритца, к точному.
43. В чем состоит метод Галеркина и метод моментов?
44. В чем состоит метод наименьших квадратов?

39. Сведение дифференциальной задачи с самосопряженным оператором к вариационной задаче?

Мы решение ДУ (с ГУ, естественно) заменяем поиском минимума какого-то функционала.

Например, вместо
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D; \\ u(P) = \phi(P), & P \in \Gamma. \end{cases}$$
ищем минимум функционала – т.н. интеграла Дирихле:
$$D[u(x,y)] = \int\limits_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
.

Зачем нам вместо того, чтобы решать ДУ, искать минимум какого-то функционала? Вы правы – в данном случае это шило на мыло, в отличие от следующей задачи – задачи Ш-Л:
$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & M \in D; \\ u(P) = 0, & P \in \Gamma; \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}$$
Которую можно заменить на такую вариационную задачу, с функционалами
$$J[u] = \frac{D[u]}{H[u]}, \quad \text{где} \quad H[u] = \int\limits_D u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
В чём тут соль? У нас в ДУ есть параметр, у нас задача на собственные значения! Если раньше мы могли просто сделать сетку и точечными шаблонами всё просчитать, то тут у нас в ДУ параметр. Что будем делать? Перебирать 100500 лямбд? Для 99,9% лямбд решение не подойдёт под ГУ, а

те редкие, под которые оно подойдёт, и будут СЗ. Но это чудовищно неэффективно.

Напротив, искать минимум функционала численно можно. (Далее в этом абзаце рассказ, как это делается и нафиг это нужно, этого нет у Боголюбова, если вам неинтересно, не читайте). Вводится сетка на u, и функционал превращается в функцию от N_x*N_y переменных (N_i – число точек на каждой оси). Т.е. если раньше его аргументом была функция u (Функционал[u]), то теперь – конечный (хотя и огромный, N_x*N_y, набор переменных: Функционал($u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1,N_x}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{N_x N_y}$) . А минимум функции многих переменных мы искать умеем, например, с помощью динамического метода или метода твёрдого шарика (может, был у кого на проге).

Подобная задача часто возникает при численном решении станц.ур.Шрёдингера с говно-потенциалами. Там тоже вместо дифуров считают минимум функционала.

Кстати, через функционалы находится ВСЕГО ЛИШЬ ОДНО собственное значение λ, которое всегда будет наименьшим. Это доказывал Боголюбов. Для квантов, кстати, это очень хорошо – находится состояние с наименьшей энергией, т.е. основное.

Давайте подытожим, тем более что нас тут был вопрос

40. Как ставится вариационная задача на собственные значения?

Вот поиск u, для которой функционал $D[u(x,y)] = \int\limits_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ минимален – это ПЕРВАЯ варционная задача, и она эквивалентна

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D; \\ u(P) = \phi(P), & P \in \Gamma. \end{cases}$$

Как вы видите, здесь СЗ значений нет.
А вот поиск u, для которой функционал

$$J[u] = \frac{D[u]}{H[u]}, \quad \text{где} \quad H[u] = \int\limits_D u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

минимален – ВТОРАЯ вариационная задача, и она эквивалентна

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in D; \\ u(P) = 0, \quad P \in \Gamma; \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}.$$

Здесь мы видим λ, так что здесь как раз поиск СЗ есть, и именно вторая вариационная задача будет ответом на вопрос №52.

41. Что такое вариационные и что такое проекционные алгоритмы? Приведите примеры.

Вот то, что мы сейчас только что с вами разобрали – это вариационные алгоритмы. Ну функционалы – это вариационка, 4-й семестр.

А вот к проекционным методам мы сейчас перейдём.

Пусть дано уравнение:

$$\hat{A}u = f, \quad f \in \mathbb{H},$$

где $\hat{A}$ - *самосопряжённый* и *положительно определённый* оператор:

$$(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v), \ u, v \in D(\hat{A}); \quad (\hat{A}u, u) \geqslant \gamma^2 ||u||^2, \ \gamma > 0, \ u \in D(\hat{A})$$

Байка от Боголюбова: чем отличается математик-теоретик от математика-прикладника? Математик-теоретик напишет $u = \hat{A}^{-1} f$ и пойдёт покурить. А для математика-прикладника по сути задача даже не начиналась – как вы будете численно обратный оператор искать? ☺

Как такое решается? Берётся система базисных функций φ_i и решение ищется в виде разложения по ним:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i$$

Где коэффициенты a_i определяются как скалярное произведение (f, φ_i). Поэтому подобные методы и называются проекционными – функция f как бы проектируется на каждую базисную функцию.

Обратите внимание на то, что число базисных функций конечно- N. У нас всё же численные значения, а у компуктеров не может быть бесконечностей. Поэтому и u_N, а не u - u_N это приближение.

Разберём 4 очень похожих метода, решающих уравнение : $\hat{A}u = f$, метод Галёркина, метод наименьших квадратов, метод Ритца и метод моментов.

Боголюбов (выкладки которого я использую) постоянно скачет между двумя операторами- $\hat{L}$ и $\hat{A}$, рассматривая то $\hat{A}u = f$, $\hat{L}u = f$. У него есть некий дифференс, у Тихонова нет, так что забейте на разницу.

43. В чем состоит метод Галеркина и метод моментов?

У Галёркина очень естественный метод. Он сказал: раз $\hat{L}u = f$, значит, невязка $\hat{L}u - f$должна быть ортогональна всем базисным функциям:

$$(\hat{L}u - f, \phi_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Распишем u:

$$\forall i: \left(\hat{L}\left[\sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j\right] - f, \varphi_i\right) = 0$$

И тут фишка в том, что это равенство должно выполняться для любой из N φ_i. При этом у нас неизвестно N a_j. Таким образом получаем систему из N уравнений, которую решаем.

44. В чем состоит метод наименьших квадратов?

Идея другая: раз $\hat{A}u = f$, то $(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$. И вновь это должно выполняться для любой φ_i . Расписываем $u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i$, подставляем, получаем N уравнений для N неизвестных a_j.

Почему, кстати, этот метод называется МНК? Да потому что он эквивалентен поиску минимума функционала:

$$||\hat{A}u - f||^2$$

Квадрата невязки. Если расписать скалярное произведение численно, через сумму, то и вылезет.

Единственный недостаток МНК – у оператора $\hat{A}$ должен быть обратный и он должен быть ограничен.

42. В чем состоит метод Ритца? Приведите достаточные условия, обеспечивающие сходимость решений, найденных по методу Ритца, к точному.

Очень похож на МНК. Сравните: вот это МНК

$$(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$$

А это Ритц:

$$(\hat{A}u_N, \phi_j) = (f, \phi_j)$$

Разница лишь в том, что Ритц поленился действовать на базисные функции оператором ☺ и за это, кстати, поплатился (а лень всегда наказуема): метод Ритца применим только в тех случаях, когда оператор $\hat{A}$ самосопряжённый и положительно определённый:

$$(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v), \;\; u, v \in D(\hat{A}); \quad (\hat{A}u, u) \geqslant \gamma^2||u||^2, \;\; \gamma > 0$$

Кстати, приведу пример такого оператора, если вам интересно: например, старый-добрый оператор Фредгольма $\int_a^b (f^2(x) + f^2(s) + 1)u(s)ds$, где f() – произвольная непрерывная функция. Симметричность ядра обеспечивает его самосопряжённость, а то, что оно всегда >0 – положительно определённость. Тем самым мы ответили на

42. В чем состоит метод Ритца? Приведите достаточные условия, обеспечивающие сходимость решений, найденных по методу Ритца, к точному.

Наконец, последний метод – метод моментов.

43. В чем состоит метод Галеркина и метод моментов?

В нём вводится вспомогательный оператор $\hat{K}$. Мы его можем выбирать каким захотим, но вообще он должен быть подобран специально под оператор $\hat{A}$, чтобы выполнялись условия:

$$(\hat{A}u, \hat{K}u) \geqslant \gamma^2||u||^2, \quad (\hat{A}u, \hat{K}u) \geqslant \beta^2||\hat{K}u||^2, \quad \gamma, \beta > 0,$$

Ну а после чего получаем вновь условие ортогональности невязки всем базисным функциям φ_i: (очень похоже на Галёркина!)

$$(\hat{L}u_N - f, \hat{K}\phi_i) = 0$$

Давайте подытожим:

Метод Ритца $(\hat{A}u_N, \phi_j) = (f, \phi_j)$ только самосопряжённые пол.-определённые $\hat{A}$	Метод Галёркина $(\hat{L}u - f, \phi_i) = 0$
МНК $(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$ только если у $\hat{A}$ есть обратный и он ограничен	Метод моментов $(\hat{L}u_N - f, \hat{K}\phi_i) = 0$